# Série 4

**Solution 13.** On note $X_1, X_2, X_3$ la durée de fonctionnement des trois composants avant panne. D'après l'énoncé, $X_1, X_2, X_3$ sont mutuellement indépendants et avec $a = 10000$ on a

$$P(X_1 \geq 10000) = P(X_2 \geq 10000) = P(X_3 \geq 10000) = 0.8$$

Pour simplifier la notation, soit $A_j$ l'événement $\{X_j \geq 10000\}$ pour $j = 1, 2, 3$.

a) Il s'agit de calculer $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)^3$ (par indépendance), ce qui donne une probabilité de $0.8^3 = 0.512$.

b) i) Il s'agit de calculer $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. Il faut passer par le complémentaire : le système ne fonctionne plus après 10000 heures si les trois composants ont une durée de vie de moins de 10000 heures. Cela correspond à la probabilité $P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = P(A_1^c)^3$ (par indépendance), ce qui donne une probabilité de $0.2^3 = 0.008$. La probabilité que le système fonctionne après 10000 heures est donc de $1 - 0.008 = 0.992$.

ii) Il s'agit de calculer

$$P(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c \mid A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(C \mid F) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)}$$

où $C$ et $F$ sont les événements 'au moins un des composants est en panne après 10000 heures' et 'le système fonctionne après 10000 heures'. On a $P(F) = 0.992$ par (b) (i).

L'événement $C \cap F = \{A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c\} \cap \{A_1 \cup A_2 \cup A_3\}$ corréspond à la possibilité que soit un soit deux des composants soient en panne après 10000 heures, c'est à dire à

$$(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3).$$

Puisque les six possibilités ici sont disjointes et les $A_j$ sont indépendants,

$$P(C \cap F) = 3P(A_1)P(A_2)P(A_3^c) + 3P(A_1)P(A_2^c)P(A_3^c) = 3 \times 0.8^2 \times 0.2 + 3 \times 0.8 \times 0.2^2 = 0.48.$$

La probabilité recherchée vaut donc $0.48/0.992 = 0.4839$.

Il est plus efficace de remarquer que $P(C \mid F) = 1 - P(C^c \mid F)$ et

$$P(C^c \mid F) = P(C^c \cap F)/P(F) = P(F \mid C^c)P(C^c)/P(F) = P(C^c)/P(F),$$

car $P(F \mid C^c) = 1$ (si aucun des composants soit en panne, $C^c$, alors le système fonctionne, $F$). Ainsi

$$P(C \mid F) = 1 - 0.512/0.992 = 0.4839.$$

**Solution 14.** Il faut trouver $c > 0$ tel que $\sum_{x=0}^{n} c\, 2^x = 1$. On a :

$$1 = c \sum_{x=0}^{n} 2^x = c\,(2^{n+1} - 1)\,.$$

Ainsi $c = (2^{n+1} - 1)^{-1}$.

**Solution 15.** L'ensemble fondamental est $\Omega = \{(r, g) : r, g \in \{1, \ldots, 6\}\}$, muni de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (ensemble des sous-ensembles de $\Omega$ ou *ensemble des parties de* $\Omega$). Les deux dés étant équilibrés et indépendants, nous définissons la fonction de probabilité par $P\{\omega\} = 1/36$ pour tout $\omega \in \Omega$. La variable aléatoire $X$ est alors donnée par $X(\omega) = rg$

où $\omega = (r, g)$. Le support de $X$ est donc $S = \{rg : r, g \in \{1, \ldots, 6\}\}$. En comptant les $\omega$ qui donnent lieu à chacune de ces valeurs, nous obtenons

$$P(X = x) = \begin{cases} 1/36 & \text{si } x \in \{1, 9, 16, 25, 36\}, \\ 1/18 & \text{si } x \in \{2, 3, 5, 8, 10, 15, 18, 20, 24, 30\}, \\ 1/12 & \text{si } x = 4, \\ 1/9 & \text{si } x \in \{6, 12\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Solution 16.** a) On a $P(X_i = k) = \binom{n_i}{k} p^k (1-p)^{n_i - k}, \qquad 0 \leq k \leq n_i, \qquad i = 1, 2.$

b) On a

$$p_i = P(X_i > n_i/2) = \begin{cases} P(X_i = 2) = p^2 & \text{si } i = 1\,, \\ P(X_i = 3) + P(X_i = 4) = p^3(4 - 3p) & \text{si } i = 2\,. \end{cases}$$

**Solution 17.** On a :

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(Y = n) = \exp^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\lambda^n}{n!} = \exp^{-\lambda} \exp^{\lambda} = 1$$

.

b)

$$\begin{aligned} \sum_{n=r}^{\infty} P(Z = n) &= p^r \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} (p-1)^{n-r} \\ &= p^r \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r-1} (1-p)^n \\ &= p^r \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{n} (1-p)^n = 1 \end{aligned}$$

**Solution 18.** a) Pour $x \in [0, 1]$, il existe des $a_n \in \{0, 1\}$, $n \geq 1$ tels que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$ (représentation en base 2 de $x$). On pose alors $U := \sum_{n=1}^{\infty} X_n 2^{-n}$ où les $X_n$, $n = 1, 2, \ldots$ sont des variables aléatoires Bernoulli.

On montre d'abord que $U$ est une variable continue. Notons que $U$ prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ et soit $F$ la fonction de répartition de $U$. Comme $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ et que $F$ est continue à droite sur tout $\mathbb{R}$ (en tant que fonction de répartition), il reste à montrer que $F$ est continue à gauche sur l'intervalle $]0, 1]$. Soit pour ceci $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n} \in ]0, 1]$. Il suffit d'observer que $P(X_n = a_n, n \geq 1) = \lim_{n \to \infty} 2^{-n} = 0$. En effet, puisque $x$ a au plus deux développements base 2, on a $F(x) - F(x-) = P(U = x) = 0$, autrement dit, $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ <}} F(y) = F(x)$. Comme $x \in ]0, 1]$ est arbitraire, $F$ est ainsi continue à gauche.

Montrons maintenant que $U$ est uniformément distribuée sur $]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathcal{N}^*$ et pour tout entier $0 \leq k < 2^n$, on note que $k2^{-n} \leq x < (k+1)2^{-n}$ si et seulement si le développement de $x$ commence par $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n$, un certain $n$-tuple correspondant aux premiers termes de la représentation des réels de l'intervalle $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$. Par conséquent, puisque $F$ est continue, $P(k2^{-n} \leq U < (k +$

$1)2^{-n}) = 2^{-n}$. Comme $n$ et $k(n)$ sont quelconques, on a prouvé que $U$ est une variable $\text{Unif}(0,1)$.

Le problème de générer des nombres aléatoire suivant une loi uniforme se ramène donc à la génération d'une suite de "bits" aléatoires indépendants pouvant prendre chacun la valeur 0 ou 1 avec probabilité 1/2.

b) Maintenant, une variable aléatoire de loi donnée peut être simulée à partir de la distribution uniforme en utilisant la *méthode de la fonction inverse*. Introduisons pour ceci la définition suivante : pour une fonction de répartition $F$ sur $\mathbb{R}$, *l'inverse généralisé* de $F$, noté $F^{-1}$, est la fonction définie par

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\} \qquad (0 < u < 1)\,.$$

On a alors le résultat suivant : si $U \sim \text{Unif}(0,1)$, alors $F^{-1}(U)$ a $F$ pour loi de répartition. En effet, il s'agit de montrer que

$$P(F^{-1}(U) \leq x) = F(x)\,.$$

Nous allons montrer le résultat sous l'hypothèse que $F$ est strictement croissante. Alors on a

$$\begin{aligned} P(F^{-1}(U) \leq x) &= P(F(F^{-1}(U)) \leq F(x)) && (F \text{ est monotone croissante}) \\ &= P(U \leq F(x)) && (\text{définition de la transformée inverse}) \\ &= F(x) && (U \sim \text{Unif}(0,1))\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Lorsque l'on veut générer des nombres aléatoires selon une loi donnée de fonction de répartition $F$, on procède donc comme suit :

— Générer un nombre aléatoire $u$ issu d'une loi $\text{Unif}(0,1)$ ;

— Calculer $x = F^{-1}(u)$ ;

— Considérer $x$ comme étant le nombre aléatoire issu de la distribution décrite par $F$.

En pratique, on recourt à l'informatique est les nombres simulés ne sont que "pseudo aléatoires". Cependant, on considère que l'on dispose d'un bon algorithme générateur si on ne parvient pas à distinguer la suite obtenue de nombres pseudo aléatoires d'une suite qui serait véritablement aléatoire.